DURÉE : 4 heures

## I

Discuter selon les valeurs du paramètre réel $a$ la nature des courbes du plan euclidien dont l'équation dans un repère orthonormé est

$$x^2 + axy + y^2 = 1 .$$

Quelles sont les symétries de ces courbes ?

## II

$\mathcal{V}$ désigne un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ l'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathcal{V}$. Une base étant choisie, à tout opérateur $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ est associée une matrice A; on appellera $\widetilde{A}$ la matrice déduite de A par la symétrie par rapport à la diagonale *non* principale, et $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'opérateur correspondant.

1° Déterminer les formes bilinéaires $f$ sur $\mathcal{V}$ telles que

$$\forall (v , w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \quad , \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) ,$$
$$f(\mathcal{A}v , w) = f(v , \widetilde{\mathcal{A}}w)$$

A-t-on alors $f(\widetilde{\mathcal{A}}v , w) = f(v , \mathcal{A}w)$ ?

2° On considère la forme bilinéaire $\mathcal{F}$ qui associe aux vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

le réel $\mathcal{F}(u , u') = b(xy' + x'y)$.

Déterminer les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ qui conservent $\mathcal{F}$.

Ces opérateurs forment-ils un groupe abélien (pour la multiplication) ?

3° On considère désormais les opérateurs tels que $\widetilde{A} = A$.

Montrer que leurs vecteurs propres, quand ils sont distincts, annulent une forme bilinéaire, indépendante de l'opérateur.

Donner une interprétation géométrique.

Énoncer et démontrer une réciproque.

4° A est-elle toujours diagonalisable ?

5° *a.* Montrer que pour toute matrice inversible, $\widetilde{P^{-1}} = (\widetilde{P})^{-1}$.

*b.* Évaluer, pour des matrices A et B quelconques, $\widetilde{AB}$ en fonction de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$.

*c.* Déterminer les matrices P ayant la propriété suivante : pour toute matrice A telle que $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{P^{-1}AP} = P^{-1}AP$,

Autrement dit, déterminer les matrices de changement de base conservant la propriété de symétrie envisagée.

## III

On suppose maintenant que $\mathcal{V}$ est de dimension $n$ sur $\mathbf{R}$. A est alors une matrice carrée d'ordre $n$ dont le terme situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{ij}$. On désignera par $\widetilde{a}_{ij}$ le terme de $\widetilde{A}$ situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

1° Exprimer $\widetilde{a}_{ij}$ en fonction de $n$ et des $a_{ij}$.

2° Évaluer le produit $\widetilde{AB}$ en fonction de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$.

3° Montrer que les matrices inversibles telles que $A^{-1} = \widetilde{A}$ forment un groupe pour la multiplication.

4° On suppose maintenant que $\mathcal{V}$ est euclidien muni d'une base orthonormée.

Si A est une matrice orthogonale, en est-il de même de $\widetilde{A}$ ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail